Модел. и анализ информ. систем. Т.**14**, №**3** (2007) 4–7

О работах А.Ю. Левина по теории линейных дифференциальных уравнений

Бурд В.Ш.
e-mail: vburd1@gmail.com

получена 20 сентября 2007

Анатолий Юрьевич Левин — разносторонний математик. В область его интересов входили теория обыкновенных дифференциальных уравнений, функциональный анализ, методы оптимизации, теория вероятностей и математическая статистика, эвристические алгоритмы и многое другое. Во всех этих областях он получил яркие результаты.

Я остановлюсь только на некоторых результатах, полученных им в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Творческая деятельность Левина началась в 1958 году. В течение 10 лет он опубликовал 35 работ, в том числе 13 заметок в ДАН СССР. 20 работ были посвящены дифференциальным уравнениям. Значительная часть этих работ относилась к теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Кандидатская диссертация [1] была посвящена многоточечной краевой задаче.

Речь идет о следующей задаче. Рассматривается уравнение

$$Lx = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0, \quad -\infty \le \alpha < t < \beta \le \infty \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами, локально суммируемыми внутри (α, β). Многоточечная задача состоит в отыскании решения уравнения $Lx = f$, принимающего в заданных n точках заданные значения. Результаты, полученные А.Ю. Левиным, существенно обобщили классические теоремы Валле-Пуссена о разрешимости и единственности решения многоточечной краевой задачи для линейных и нелинейных уравнений. В ходе исследования в работе [2] установлены неулучшаемые оценки дифференцируемых функций. Приведем одно утверждение из этой работы.

Пусть $x(t)$ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ n раз и удовлетворяет условиям

$$x(a_1) = x'(a_2) = \cdots = x^{(n-1)}(a_n) = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые точки отрезка $[a, b]$, причем выполняется одно из неравенств

$$(a \le) a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n (\le b),$$

$$(a \le) a_n \le a_{n-1} \le \cdots \le a_2 (\le b).$$

Тогда на $[a, b]$ имеет место оценка

$$|x(t)| \le \frac{1}{n\left[\frac{n-1}{2}\right]!\left[\frac{n}{2}\right]!}(b-a)^n \max_{a \le t \le b} |x^{(n)}(t)|, \quad a \le t \le b.$$

Константа в этой оценке неулучшаема.

Исследование разрешимости многоточечной краевой задачи привело А.Ю. Левина к изучению неосцилляции решений, распределению нулей и роста решений. Напомним, что промежуток (α, β) называется промежутком неосцилляции для оператора L, если каждое нетривиальное решение уравнения (1) имеет в (α, β) не более $n - 1$ нулей с учетом кратности.

Целый комплекс внешне разнообразных вопросов: дифференциальные неравенства, представление L в виде произведения n вещественных операторов первого порядка, разрешимость краевых задач, вопросы перемежаемости нулей, ляпуновские зоны устойчивости для уравнения Хилла, свойства чебышевских и декартовых систем функций, осцилляционность функций Грина краевых задач, теоремы о среднем значении - все это самым тесным образом связано с задачей о неосцилляции решений уравнения (1). А.Ю. Левин получил новые результаты в большинстве из перечисленных вопросов.

Мы остановимся подробнее только на двух наиболее ярких, как нам кажется, достижениях Левина.

В большой статье, опубликованной в журнале "Успехи математических наук" [3], получены необходимые и достаточные условия того, что промежуток $(a, b] \subset (\alpha, \beta)$ является промежутком неосцилляции для оператора L. Эти условия состоят в существовании $n - 1$ функции, которые удовлетворяют некоторым неравенствам. Непосредственным следствием этого критерия является следующий замечательный результат.

Пусть при всех достаточно больших t корни $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ уравнения

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t) = 0$$

вещественны и удовлетворяют неравенствам

$$\nu_0 \le \lambda_(t) \le \nu_1 \lambda_2(t) \le \dots \le \nu_{n-1} \le \lambda_n(t) \le \nu_n,$$

где ν_i — некоторые постоянные ($\nu_1 < \nu_1 < \dots < \nu_n$). Тогда для линейно независимых решений уравнения (1) имеют место оценки

$$c_i e^{\nu_{i-1} t} \le x_i(t) \le d_i e^{\nu_i t},$$

где c_i и d_i — некоторые постоянные.

Второй результат, полученный А.Ю. Левиным [4], который я хочу привести, относится к задаче об устойчивости решений уравнения второго порядка вида

$$x'' + q(t)x = 0 \tag{2}$$

с вещественной ω-периодической функцией $q(t)$, причем $q(t)$ не равна тождественно нулю и

$$\int\limits_0^\omega q(t)dt \ge 0.$$

Ляпунов показал, что решения уравнения (2) устойчивы, если выполняется неравенство

$$\int\limits_0^\omega q(t)dt \le \frac{4}{\omega}. \tag{3}$$

М.Г. Крейн заметил, что в неравенстве (3) вместо функции $q(t)$ можно взять функцию $q_+(t) = \max\{0, q(t)\}$. Левин установил некоторый общий результат об устойчивости решений уравнения (2), из которого следует, что вместо неравенства (3) можно потребовать выполнения менее жесткого условия

$$\int\limits_t^{t+\omega/2} q_+(t) \le \frac{4}{\omega}. \tag{4}$$

Усилить результат Ляпунова — это выдающееся достижение!

Отметим, что приведенный результат вытекает из следующей общей теоремы, установленной Левиным.

Теорема. *Если для некоторого a, $0 \le a \le \pi/\omega$, и некоторого натурального n выполняется неравенство*

$$\int\limits_t^{t+\omega/n} (q - a^2)_+ dt \le 2a \frac{\cos(\omega a/n) - \cos(\pi/n)}{\sin(\omega a/n)}$$

при всех t из промежутка $0 \le t \le \omega(1 - 1/n)$, то каждое нетривиальное решение уравнения (2) имеет не более одного нуля в промежутке $[0, \omega]$.

Доказательство этого утверждения опирается на ряд глубоких результатов Левина по исследованию поведения решений уравнений второго порядка, в частности, на установленный им интегральный принцип сравнения [5], обобщающий классическую теорему сравнения Штурма.

К сожалению, Левин не опубликовал полного доказательства описанных выше результатов по устойчивости решений уравнения (2). Полные доказательства содержатся только в его докторской диссертации.

Недавно Ю.С. Колесов [6] опубликовал доказательство того, что неравенство (4) влечет устойчивость решений уравнения (2), опирающееся на идеи теории оптимального управления.

Из многих работ Левина, посвященных поведению решений уравнений второго порядка, я остановлюсь только на одной. В работе [7] для уравнения

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (-\infty < a \le t < b \le \infty), \tag{5}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ вещественны и $q(t)$ не меняет знака на $[a, b)$, для неколебательного случая, когда каждое решение имеет конечное число нулей на $(a, b]$, дается полная классификация возможных типов фундаментальных систем решений уравнения (5), учитывающая следующие характеристики поведения решений при $t \to b$: стремление к нулю, к ненулевому пределу, к бесконечности, возрастание или убывание вблизи b (в неколебательном случае каждое решение монотонно вблизи b). Оказывается, что определяющую роль играет сходимость или расходимость четырех интегралов, построенных по функциям $p(t), q(t)$.

Полное изложение описанных выше результатов содержится в работе [8].

В работе [9] изучается следующая задача. Рассматриваются матричные системы дифференциальных уравнений

$$X' = A(t)X, \quad X(a) = I, \quad (a \le t \le b),$$

$$X_n' = [A(t) + R_n(t)]X_n, \quad X_n(a) = I, \quad n = 1, 2, 3 \ldots, \quad (a \le t \le b).$$

Исследуются условия, при которых последовательность $X_n(t)$ равномерно сходится к $X(t)$. Для скалярных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости решений и их производных в терминах коэффициентов уравнений.

После 1970 года Анатолий Юрьевич редко обращался к дифференциальным уравнениям. В 1973 году опубликовал работу [10], в которой изложены подробные доказательства результатов из заметки [9]. В 1976 году появились две статьи А.Ю. Левина и Г.Д. Степанова [11], [12]. В 1988 году в [13] получен критерий абсолютной неосцилляционной устойчивости для уравнений n-го порядка, а именно для уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$$

с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам

$$a_i \le p_i(t) \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Через $\Omega(a, b)$ обозначается класс уравнений с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам (6). Сформулирована следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы все решения любого уравнения из класса $\Omega(a, b)$ не колебались и стремились к нулю при $t \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы многочлены*

$$P_1(u) = u^n + a_1u^{n-1} + b_2u^{n-2} + a_3u^{n-3} + \ldots,$$

$$P_2(u) = u^n + b_1u^{n-1} + a_2u^{n-2} + b_3u^{n-3} + \ldots$$

имели только вещественные корни.

Позднее появилась статья с подробным доказательством этой теоремы.

Последняя работа [14] Анатолия Юрьевича, посвященная дифференциальным уравнениям, опубликована в 1995 году. В этой работе известная теорема Харитонова о робастной устойчивости распространяется на слабо нестационарные системы.

Безусловно, работы А.Ю. Левина по теории неосцилляции линейных дифференциальных уравнений и смежным вопросам являются классическими.

Список литературы

1. Левин А.Ю. О многоточечной задаче: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1961.

2. Левин А.Ю. О некоторых оценках дифференцируемых функций //ДАН СССР. 1961. Т. 138, №1. С. 37–38.

3. Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ //Успехи математических наук. 1969. Т.24. Вып. 2(146). С. 43–96.

4. Левин А.Ю. К вопросу о нулевой зоне устойчивости //ДАН СССР. 1962. Т. 145, №6. С. 1221–1224.

5. Левин А.Ю. Об одном принципе сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка// ДАН СССР. 1962. Т. 135, №4. С. 783–786.

6. Колесов Ю.С. О доказательстве теоремы Левина о полупериоде //Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, №8. С. 1181–1184.

7. Левин А.Ю. Классификация неколебательных случаев для уравнения $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ со знакопостоянной $q(t)$ //ДАН СССР. 1966. Т.171, №5. С. 1037–1040.

8. Левин А.Ю. Поведение решений уравнения $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ в неколебательном случае //Математический сборник. 1968. Т. 75, №1. С. 39–63.

9. Левин А.Ю. Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ //ДАН СССР. 1967. Т. 176, №4. С. 774–777.

10. Левин А.Ю. Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I //Вестник Ярославского университета. 1973. Вып. 5. С. 105–132.

11. Левин А.Ю., Степанов Г.Д. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. I //Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, №3. С. 606–625.

12. Левин А.Ю., Степанов Г.Д. Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака. II //Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, №4. С. 813–830.

13. Левин А.Ю. Критерий абсолютной неосцилляционной устойчивости для уравнений n-го порядка //Успехи математических наук. 1988. Т. 43. Вып. 5(263). С. 203–204.

14. Левин А.Ю. Теорема Харитонова для слабо нестационарных систем //Успехи математических наук. 1995. Т.50. Вып. 6(306). С. 189–190.